

Leçon 219 : Extremums: existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

[Amr] : *Calcul différentiel*, Mohammed El Amrani

[Bec] : *Objectif agrégation*, Vincent Beck, Jérôme Malick, Gabriel Peyré

[Ber-Ber] : *Analyse pour l'agrégation de mathématiques*, Julien Bernis, Laurent Bernis

[Cal-Per] : *Carnet de voyage en Analystan*, Phillipe Caldero, Marie Peronnier

[Dem] : *Analyse numérique et équations différentielles*, Jean-Pierre Demailly

[Gou] : *Analyse*, Xavier Gourdon

[Li] : *Cours d'analyse fonctionnelle*, Daniel Li

[Rom] : *Analyse réelle*, Jean-Étienne Rombaldi

[Rou] : *Petit guide de calcul différentiel*, François Rouvière

[Sch] : *Analyse numérique : une approche mathématique*, Michelle Schatzman

[Tau] : *Analyse complexe*, Patrice Tauvel

I Partie A - Extrema, continuité

I.1 Définitions [Rou]

I.2 Compacité [Gou] [Ber-Ber]

Prop 1 : Si f est une fonction continue sur un compact à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors elle atteint ses bornes.

App 2 : Une application coercive sur $\mathbb{R}^d$ admet un minimum.

Rem 3 : Existence d'extrema

App 4 (Point fixe compact) :

I.3 La particularité des fonctions convexes [Bec] [Rom]

II Partie B - Calcul différentiel

II.1 Gradient et Hessienne, nos amis de l'optimisation [Amr] [Bec]

II.2 Minimisation sous contrainte [Cal-Per] [Rou]

Thm 5 (Extrema liés) :

App 6 : Un parallélépipède d'aire minimum pour un volume donné est un cube.

Prop 7 (Inégalité de Hadamard) :



Dév 8 (Votre matrice la plus proche de chez vous) :

III Partie C - Extrema dans des evn particuliers

III.1 Dans un Hilbert [Li] [Bar-Led] [Ber-Ber]

Thm 9 (Projection sur un convexe) :

Ex 10 (Projection sur un sev fermé) :

Ex 11 (Projection sur des figures) : [Annexe : Projection sur un carré, c-ex]

App 12 (Espérance conditionnelle) :

App 13 (Exercice de minimisation d'une intégrale) :

Prop 14 (Minimisation d'une fonctionnelle convexe) :

III.2 En dimension finie [Gou] [FGN] [Ber-Ber]

Déf 15 (Matrice de Gram) :

Ex 16 : Matrice de Gram d'une base orthonormée.

Prop 17 : Les matrices hermitiennes positives sont les matrices de Gram.

Prop 18 : Le déterminant de Gram $G(x_1, \dots, x_n)$ est nul si et seulement si la famille est liée.

Thm 19 (Distance à un sev et déterminants de Gram) :

App 20 (Inégalité de Hadamard) :

Rem 21 : Utilisation des valeurs propres, du théorème spectral, pour déterminer des min et des max.



Dév 22 (Courant-Fischer) :

Thm 23 (Ellipsoïde de John-Loewner) :

III.3 Approximation polynomiale [Dem]

Déf 24 (Fonction équi oscillante) :

Ex 25 : Polynômes de Tchebychev.

Prop 26 : Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $d(f, R_n[X]) = \|f - P\|$. Alors $g := fP$ équioscille sur $n + 2$ points de $[a, b]$.

Thm 27 (Meilleure approximation uniforme) :

Ex 28 (Polynôme de Tchebychev) :

IV Partie D - Fonctions holomorphes [Tau]

Prop 29 (Inégalités de Cauchy) :

App 30 (Liouville) :

Prop 31 (Formule de la moyenne) :

Thm 32 (Principe du maximum local) :

Thm 33 (Principe du minimum local) :

Thm 34 (Principe du maximum global) :

App 35 (Lemme de Schwarz) :

V Partie E - Analyse numérique

V.1 Méthode à tomber dans les pommes [Sch] [Dem]

Thm 36 (Newton) :

Ex 37 : Calcul de racine de 2.

Rem 38 : Méthode de la sécante.

V.2 Algorithmes de descentes [Ber] [Sch]

Prop 39 (Kantorovich) :

Thm 40 (Gradient à pas optimal) :